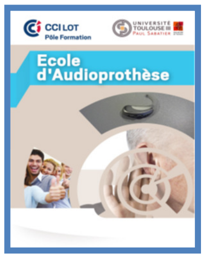
Janvier 2022



Première année : mathématiques

Contrôle terminal – 2h

Tout document interdit ; calculatrice de la faculté autorisée

Questions de cours

Exprimer le produit scalaire du vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ avec $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$.
Calculer la somme du nombre complexe $\underline{z}$ = a + ib avec $\underline{z}'$ = a' + ib' ; expliciter les parties réelle et imaginaire.
En utilisant les propriétés du logarithme, réécrire $ln(1/x)$ en replaçant la variable x au numérateur.

Fonctions périodiques

$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ représente la tension aux bornes d'une prise de courant ; ω est appelé pulsation, A amplitude ou tension maximale.

1. Montrer que u est périodique. Calculer en fonction de ω sa période et sa fréquence, l'inverse de la période.
2. La tension efficace correspondant à une tension variable de période T est donnée par
$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt.$$
Calculer U_{eff} en fonction de A et ω.
3. Sachant qu'en France la fréquence du courant est de 50 Hz et la tension efficace de 220 V, déterminer A et ω.
4. De plus, on suppose que $\varphi = \pi/4$. Représenter graphiquement U.
5. Calculer du/dt et d^2u/dt^2. En déduire que u est une solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0.$
6. Déterminer la primitive $U(t)$ de $u(t)$ qui s'annule à $t = 0$.

Calcul par utilisation de primitives connues

$$A = \int_0^1 \sqrt{3x}dx,$$

$$B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$C = \int_{1}^{8} \frac{1}{V^{\gamma}} dV \quad (\gamma > 0).$$

Equation différentielle du 2ème ordre

Soit une masse $m = 1$ kg reliée au plafond par un ressort. Si on note $z = 0$ la position de la masse quand le ressort est au repos (c'est-à-dire, quand la masse n'y est pas encore accrochée), k la constante de raideur du ressort et μ le coefficient de frottement qu'exerce l'air sur la masse (on suppose $\mu << k$), alors la position de la masse vérifie l'équation différentielle suivante :

$$z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = -g,$$

avec g l'accélération locale de la pesanteur.

1. Trouver une solution particulière constante. Interpréter physiquement le résultat.
2. Trouver la solution telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. Interpréter physiquement le résultat.